Aufgabe 3

Wir erstellen eine Verknüpfungstabelle:

$\circ$	d_0	d_1	d_2	d_3	s_x	s_y	s_d	s_n
d_0	d_0	d_1	d_2	d_3	s_x	s_y	s_d	s_n
d_1	d_1	d_2	d_3	d_0	s_n	s_d	s_x	s_y
d_2	d_2	d_3	d_0	d_1	s_y	s_x	s_n	s_d
d_3	d_3	d_0	d_1	d_2	s_d	s_n	s_y	s_x
s_x	s_x	s_d	s_y	s_n	d_0	d_2	d_1	d_3
s_y	s_y	s_n	s_x	s_d	d_2	d_0	d_3	d_1
s_d	s_d	s_y	s_n	s_x	d_3	d_1	d_0	d_2
s_n	s_n	s_x	s_d	s_y	d_1	d_3	d_2	d_0

falls d_1 als "im Uhrzeigersinn" genommen wird

beides okay!

falls d_1 wie geplant als "gegen den Uhrzeigersinn" genommen wird

$\circ$	d_0	d_1	d_2	d_3	s_x	s_y	s_d	s_n
d_0	d_0	d_1	d_2	d_3	s_x	s_y	s_d	s_n
d_1	d_1	d_2	d_3	d_0	s_d	s_n	s_y	s_x
d_2	d_2	d_3	d_0	d_1	s_y	s_x	s_n	s_d
d_3	d_3	d_0	d_1	d_2	s_n	s_d	s_x	s_y
s_x	s_x	s_n	s_y	s_d	d_0	d_2	d_1	d_3
s_y	s_y	s_d	s_x	s_n	d_2	d_0	d_3	d_1
s_d	s_d	s_x	s_n	s_y	d_3	d_1	d_0	d_2
s_n	s_n	s_y	s_d	s_x	d_1	d_3	d_2	d_0

Zeile $\circ$ Spalte heißt Spalte zuerst anwenden hier bei mir

5 Pkte - 1 Pkt pro neue Art Fehler

Aufgabe 4

Da eine Relation auf M einfach eine Teilmenge von $M \times M$ ist und $M \times M$ genau n^2 viele Elemente besitzt, gibt es $2^{(n^2)}$ Relationen auf M. 1 Pkt

Eine Relation ist reflexiv, wenn die n Elemente der Form (m,m), $m \in M$, in ihr enthalten sind. Das liefert nun 2^{n^2-n} reflexive Relationen auf M, da wir für die übrigen n^2-n Elemente jeweils die beiden Optionen "$\in$" und "$\notin$" haben. 1 Pkt

Eine symmetrische Relation besteht aus einer Teilmenge von

$\Delta_M = \{(m,m) \mid m \in M\}$

und einer Teilmenge der Menge der 2-elementigen Teilmengen von M. Somit gibt es

$$2^n \cdot 2^{\binom{n}{2}} = 2^{n + \frac{n!}{(n-2)!\,2!}} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

symmetrische Relationen auf M 1 Pkt

Ist $n=0$, so gibt es offenbar nur $\emptyset$ als Äquivalenzrelation.

1 Pkt Vermöge der Äquivalenzklassen ist eine Äquivalenzrelation (bis auf Umbenennung der Elemente) genau eine Partition von $n \geq 1$. Wir zählen daher zunächst Partitionen:

- $n=1 \rightsquigarrow 1$ Partition
- $n = 2 = 1+1 \rightsquigarrow 2$ Partitionen
- $n = 3 = 2+1 = 1+1+1 \rightsquigarrow 3$ Partitionen
- $n = 4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$ $\rightsquigarrow 5$ Partitionen

Jetzt müssen wir noch überlegen, wie viele Optionen durch Umbenennung entstehen:

- $n=1 \rightsquigarrow 1$ Option
- $n=2 \rightsquigarrow 1$ Option
  $n = 1+1 \rightsquigarrow 1$ Option
- $n=3 \rightsquigarrow 1$ Option
  $n = 2+1 \rightsquigarrow$ $\binom{3}{2} = 3$ Optionen
  $n = 1+1+1 \rightsquigarrow 1$ Option
- $n=4 \rightsquigarrow 1$ Option
  $n = 3+1 \rightsquigarrow 4$ Optionen
  $n = 2+2 \rightsquigarrow \underbrace{\frac{\binom{4}{2}}{2}}_{\text{2-elementige Teilmenge, aber Komplement nicht erneut zählen}} = 3$ Optionen

$n = 2+1+1 \rightarrow \binom{4}{2} = 6$ Optionen

$n = 1+1+1+1 \rightarrow 1$ Option

Insgesamt also

- $n=0$: 1 Äq. rel.
- $n=1$: 1 Äq. rel.
- $n=2$: $1+1 = 2$ Äq. rel.
- $n=3$: $1+3+1 = 5$ Äq. rel.
- $n=4$: $1+4+3+6+1 = 15$ Äq. rel.

1 Pkt.